חשבון אינפיניטיסימלי 1

גיל אלון

2026

כרך א

יחידות

תוכן עניינים לכרך א

פתח דבר 5

יחידה 1: המספרים הממשיים **7**

1.1 מושגים בסיסיים בשפה המתמטית 9

1.1.1 קבוצות 9

פתח דבר

התשבון האינפיניטסימלי הוא התורה המתמטית העוסקת בכמויות קטנורת לאין שיעור (הנקראות גדלים אינפיניטסימליים) ובקשר בינן לבין כמויות רגילות. קשר כזה קיים כמעט בכל מקום בעולם הסובב אותנו: שינויים זעירים לאין שיעור מצטברים לשינויים גדולים. למשל, לא נוכל להבחין בשינוי הרגעי בגובהו של ילד; אולם לאורך זמן נבחין שגובהו השתנה. גם גוף הנע במהירות, כגון אצן במסלול ריצה, מעורר את השאלה בדבר הקשר בין שינוי רגעי לשינוי מצטבר: מהירותו של האצן משתנה מרגע לרגע, אך פיסות המידע בדבר מהירותו בכל רגע נתון מצטברות לכדי קביעת מיקומו לאחר משך זמן.

Sir Issac Newton(1643–1727)

ניתן לראות כמה יסודות של החשבון האינפיניטסימלי כבר בכתביהם של אחדים מהמתמטיקאים בני יוון העתיקה. אך יסודות אלה לא הבשילו לכדי תורה שיטתית; ובמיוחד מקובל לציין שתי בעיות יסודיות הקשורות לחשבון האינפיניטסימלי ואשר פתרונן הכללי לא היה ידוע בעת העתיקה: בעיית מציאת המשיק לעקומה, ובעיית חישוב השטח מתחת לעקומה.

את היסודות המודרניים של החשבון האינפיניטסימלי הניחו במאה ה־17 **סר אייזק ניוטון** ו**גוטפריד וילהלם לייבניץ**, אשר פיתחו, כל אחד בנפרד, את מושגי הנגזרת והאינטגרל, ואת חוקיהם היסודיים. מושגים אלה נותנים מענה לבעיות המשיק והשטח, ולקשת רחבה של בעיות יסוד בפיזיקה, מתמטיקה, גיאומטריה ומדעים נוספים.

Gottfried Wilhelm Leibnitz
(1646–1716)

אף כי חישוביהם של ניוטון, לייבניץ וממשיכי דרכם היו מדויקים, התורה שפיתחו לא היתה מבוססת על יסודות מוצקים והוכחות דדוקטיביות כפי שהיו הגיאומטריה והאלגברה. על רקע זה זכה החשבון האינפיניטסימלי לביקורת חריפה ממתמטיקאים ואנשי רוח בני תקופתם. באותה עת חסרו הגדרות מדויקות, ונתגלו פערים ופרדוקסים שהדגישו את חסרונה של תורה מתמטית עקבית.

עבודתם של מתמטיקאים בני המאה ה־18 וה־19, וביניהם **קושי**, **לגראנז'**, **ויירשטראס**, **קאנטור**, **דדקינד** ו**רימן**, סיפקה את הבסיס הפורמלי לתורה זו, שביסודה הגדרה מדויקת של המספרים הממשיים ושל מושג הגבול. בדרך זו נסגרו הפערים שליוו את התורה בראשית דרכה, והחשבון האינפיניטסימלי הפך לאחת מאבני הבניין הבסיסיות של המתמטיקה המודרנית.

בנושאים אלה עוסק הקורס "חשבון אינפיניטסימלי 1", והמשכו "חשבון אינפיניטסימלי 2". ביחידה 1, נכיר את המספרים הממשיים. לאחר מכן, תפותח תורת הגבולות, אשר בעזרתה נוכל לדון בפונקציות רציפות, בנגזרות ובאינטגרלים.

קורס זה מיועד ללימוד עצמי. בגוף הטקסט, ישנן שאלות אשר יעזרו לכם לוודא כי הבנתם את החומר; מומלץ מאד לפתור אותן תוך כדי הקריאה. תוכלו להסתייע ברמזים ובפתרונות המלאים, על־פי ההפניות שבצידי השאלות. בסוף כל יחידה ישנן שאלות להערכה עצמית. שאלות וחלקים בטקסט המסומנים ב־(*) הם בבחינת חומר רשות, שהוא בדרך כלל ברמת קושי גבוהה יותר משאר החומר.

אנו מקווים ששילוב זה של קריאה ותרגול יאפשר לכם להבין כהלכה הן את הרעיונות, והן את השפה המתמטית שבה הם מובעים.

יחידה 1
המספרים הממשיים

מטרות היחידה

- להכיר מושגי יסוד בשפה המתמטית.
- להכיר את מערכות המספרים הטבעיים, השלמים, הרציונליים, והממשיים.
- להכיר את אקסיומות המספרים הממשיים: אקסיומות השדה, הסדר והשלמות.
- ללמוד כיצד ניתן להוכיח זהויות ואי־שוויונות מתוך אקסיומות המספרים הממשיים.
- להוכיח קיום שורשים בעזרת אקסיומת השלמות.

1.1 מושגים בסיסיים בשפה המתמטית

בפרק זה נתוודע למושגים כגון **קבוצה**, **יחס**, ו**פעולה**. מושגים אלה הם אבני הבניין של השפה המתמטית – השפה שבה נביע את הטענות וההוכחות בקורס זה.

1.1.1 קבוצות

המושג הבסיסי ביותר במתמטיקה המודרנית הוא מושג ה**קבוצה**. כמושג יסודי, לא ניתן להגדירו על סמך מושים מתמטיים הקודמים לו, אך כדי שיובהר במה מדובר, ניעזר בהגדרה המילולית הבאה:

הגדרה 1.1
קבוצה היא אוסף של **עצמים**. עצמים אלה נקראים **איברי הקבוצה**.

בדרך כלל נסמן קבוצות באותיות לטיניות גדולות – A, B, C, ... ואיברים של קבוצות באותיות לטיניות קטנות – $a, b, c, \ldots$.

הגדרה 1.2
אם a איבר של הקבוצה A , נסמן זאת בסימון $a \in A$

(קרי: **a שייך ל־ A**).

אם a אינו איבר של הקבוצה A , נסמן זאת בסימון $a \notin A$

(קרי: **a לא שייך ל־ A**).

ניתן לתאר קבוצה על־ידי כתיבת איבריה בתוך צומדיים: $\{\ \}$. למשל:

◀ **דוגמאות 1.1**

1. $\{1,2,3\}$ היא קבוצה שאיבריה הם המספרים 1, 2 ו־ 3. מתקיים אפוא: $1 \in \{1,2,3\}$ וגם $2 \in \{1,2,3\}$ וגם $3 \in \{1,2,3\}$; מאידך, $7 \notin \{1,2,3\}$.

2. {א,ב,ג,ד,ה,ו,ז,ח,ט,י,כ,ל,מ,נ,ס,ע,פ,צ,ק,ר,ש,ת} ◀היא קבוצת האותיות באלפבית העברית.

אין חשיבות לסדר בו נרשום את איברי הקבוצה: את הקבוצה $\{2,5,6\}$ נוכל לרשום באופן שקול גם בצורה $\{6,2,5\}$ או $\{5,2,6\}$. כמו כן, אין חשיבות למספר הפעמים שאיבר מסוים חוזר ברשימה: כל איבר נספר פעם אחת. למשל, הקבוצות $\{1,2,3\}$ ו־ $\{1,2,2,3,3\}$ שוות זו לזו, ובשתיהן יש שלושה איברים, 1, 2 ,ו־ 3.

שאלה 1.1

1. האם מתקיים $1 \in \{2,3\}$?
2. האם מתקיים $2 \notin \{1,1,3\}$?
3. האם מתקיים $1 \in \{3,1\}$?
4. האם מתקיים $1 \in \{\{1\},\{2\}\}$?

הפתרון בעמוד 13

הגדרה 1.3
קבוצת המספרים הטבעיים היא הקבוצה

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...\}$$

(קבוצה זו מסומנת באות $\mathbb{N}$. האות הראשונה במונח האנגלי – Natural Numbers).

שאלה 1.2

הפתרון בעמוד 13

כיצד יש לכתוב בכתיב מתמטי: "3 הוא מספר טבעי"?

דרך נוספת לתיאור קבוצה היא כתיבת מכלול ה**תכונות** שאיבר בקוצה צריך לקיים. צורת הכתיב, הנקראת משמאל לימין, היא

$$\{\text{רשימת תנאים} \mid \text{ביטוי}\}$$

הקו האנכי | משמעותו "כך ש־".

◀ **דוגמה 1.2**
הקבוצה

$$\{n|n \in \mathbb{N}, n > 3\}$$

היא קבוצת כל ה- n-ים כל ש- n מספר טבעי וגם $n > 3$.

קבוצה זו היא למעשה הקבוצה

$$\{4, 5, 6, ...\}.$$

לצורת כתיבה זו יש נוסח מקובל נוסף, שבו כותבים מראש מהי הקבוצה הכללית ממנה נלקחים איברי הקבוצה המתוארת. למשל, את הקבוצה שבדוגמה 1.2 ניתן לכתוב גם כך:

$$\{n \in \mathbb{N} | n > 3\}.$$

תכונה בסיסית של קבוצות היא ששתי קבוצות הן שוות אם, ורק אם, יש להם אותם האיברים. זו אחת האקסיומות של תורת הקבוצות:

למה 1.4

תהיינה A ו- B קבוצות. מתקיים $A = B$ אם ורק אם כל איבר של A הוא איבר של B, וכל איבר של B הוא איבר של A.

הגדרה 1.5

הקבוצה הריקה היא קבוצה שאין לה אף איבר. קבוצה זו מסומנת על ידי ϕ.

הערות:

1. לכאורה יכולה להיות יותר מקבוצה ריקה אחת; אולם על־פי אקסיומה 1.4, שתי קבוצות שיש להן אותם האיברים הן שוות. לכן כל שתי קבוצות ריקות הן אותה הקבוצה, כלומר, יש רק קבוצה ריקה אחת. מכאן השימוש במונח **ה**קבוצה **ה**ריקה.

אילו היו שתי קבוצות ריקות שונות זו מזו, אז היה איבר השייך לאחת הקבוצות ולא שייך לשניה, ודבר זה אינו אפשרי כי הן ריקות.

2. שימו לב כי הקבוצה ϕ אינה ריקה: זו קבוצה בעלת איבר אחד, והוא הקבוצה הריקה. אם נדמה קבוצה לקופסה שבתוכה נמצאים איברי הקבוצה, הרי ש־ ϕ היא קופסה ריקה; ואילו $\{\phi\}$ היא קופסה שבתוכה יש קופסה ריקה.

הגדרה 1.6

נאמר שקבוצה A **מוכלת** בקבוצה B אם כל איבר של A הוא איבר של B. מצב זה מסומן כך: $A \subseteq B$.

במקרה זה נאמר גם ש־ A היא **תת־קבוצה** של הקבוצה B, וש־ B **מכילה** את A.

מצב הדדי זה בין הקבוצות A ו־ B מתואר באיור 1.

דוגמה 1.3

1. הקבוצה $\{2,4\}$ מובלת בקבוצה $\{4,5,2\}$ אך אינה מוכלת בקבוצה $\{1,2\}$.
2. הקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצה.
3. כל קבוצה היא תת־קבוצה של עצמה.

בסימון מתמטי:
$\{2,4\} \subseteq \{4,5,2\}$
$\{2,4\} \subseteq \{1,2\}$

שאלה 1.3

1. תהיינה A ו־ B קבוצות. נסחו תנאי שקול לשוויון בין A ו־ B , באמצעות סימן ההכלה $\subseteq$.
2. נתונות הקבוצות הבאות:

$$A_1 = \{1,3\}\,;\ A_2 = \{1,5\}\,;\ A_3 = \phi,\ A_4 = \{1\}\,,\ A_5 = \mathbb{N}$$

בדקו אילו יחסי הכלה מתקיימים בין קבוצות אלה.

הפתרון בעמוד 13

הגדרה 1.7

נאמר שקבוצה A **מוכלת ממש** בקבוצה B אם $A \subseteq B$ וגם $A \neq B$. מצב זה מסומן כך: $A \subsetneq B$.

רמזים ופתרונות לשאלות בכרך א

רמזים לשאלות ביחידה 1

פתרונות לשאלות ביחידה 1

תשובה 1.1

1. שקר
2. אמת
3. אמת
4. אמת

השאלה בעמוד 10

תשובה 1.2

כך: $3 \in \mathbb{N}$.

השאלה בעמוד 10

תשובה 1.3

$A_1 \subseteq \mathbb{N}$.

השאלה בעמוד 12